التمرين الأول:

04.5
نقاط

يحتوي صندوق u_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين. لايمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من u_1 ولتكن الأحداث:

A " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء " ، B " سحب ثلاث كرات من نفس اللّون " ، C " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل'

1) بيّن أنّ : $P(A) = \frac{1}{14}$ ثمّ أحسب $P(B)$ و $P(C)$

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات المسحوبة

أ/ حدّد قيم المتغير العشوائي X

ب/ حدّد قانون الاحتمال للمتغيّر المتغير العشوائي X

جـ/ اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، و يكسب $25DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .هل اللعبة مربحة له ؟

4) نعتبر صندوقا آخر u_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء

نضع الكرات الثلاثة المسحوبة من u_1 في الصندوق u_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من u_2

* ما احتمال أنّ الكرتان المسحوبتان من u_2 بيضاوين علما أنّ الكرات الثلاث المسحوبة من u_1 لها نفس اللون

التمرين الثاني

04
نقاط

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{o}; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ;B و I التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = -2$ ، $z_B = -1 + i$ و $z_I = i$

من أجل كل عدد مركّب z حيث $z \neq -2$ نضع : $z' = \frac{iz+i+1}{z+2}$ حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة z'

1) – أ/ تحقق من أنّ : $z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$

- ب/ بيّن أنّه أذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها

- جـ/ عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا

2) – أ/ تحقق من أنّ : $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$

- ب/ استنتج أنّ : $IM' \times AM = \sqrt{2}$ وأنّ : $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

- جـ/ بيّن أنّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1

فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها

التمرين الثالث

05.5 نقاط

I) نعتبر كثير الحدود $p(z)$ للمتغير المركب z حيث : $p(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

1/ أحسب $p(2)$ ثمّ عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

2/ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$ ، ثمّ أكتب حلولها على الشكل الأسي

II) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدة الطول $5cm$)

ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكلّ نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = \frac{1+i}{2} Z$

1) بيّن أنّ S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة

2) نسمي A_0 النقطة التي لاحقتها $Z_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1} = S(A_n)$ ،
مع النقطة A_n صورة العدد المركب Z_n

أ/ أحسب Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، Z_3 ثمّ علّم النقط : A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4

ب/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = OA_n$ ، أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

** تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ : $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

** ابتداءا من أيّ رتبه n_0 تنتمي كلّ النقط A_n إلى القرص الذي مركزه O ونصف قطره 0.1

** نرمز بـ T_n إلى مجموع أطوال القطع المستقيمة $[A_0O], [A_1O], \dots\dots\dots\dots, [A_nO], [A_{n+1}O]$

أحسب المجموع T_n بدلالة n ثمّ أحسب نهاية T_n

3) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث : OA_nA_{n+1}

التمرين الرابع

06 نقاط

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathcal{R}$ بــ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a = 1, b = 0, c = -3$

أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3- عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل . ثمّ أرسم (C_f) .

4- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathcal{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathcal{R}$.

5- أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$

6- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

التمرين الاول:

0.25 (1 تبيين أنّ: $P(A)=\frac{1}{14}$ ، لدينا $p(A)=\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14}$

0.5 $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}\approx 0.06$.

0.5 الحدث C: سحب كرة بيضاء على الأقل الحدث $\overline{C}$: عدم سحب كرة بيضاء

ط1: $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx 0.88$ ط2: $p(C)=\frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3\times C_5^0}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx 0.88$

0.5 2) أ) قيم المتغير العشوائي X هي: $1\ ;\ 2\ ;\ 3$

0.5 ب/ $X=1$: "سحب 3 كرات بلون واحد" $p(X=1)=p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

0.5 $X=2$: "سحب 3 كرات بلونين مختلفين"

$(B;B;\overline{B})$ أو $(N;N;\overline{N})$ أو $(R;R;\overline{R})$ $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$

0.5 $X=3$: "سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة" $p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}$

ج) ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه: $+25\ ;\ 0\ ;\ -25$.

0.75 $E(Y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)=\frac{475}{84}\approx 5.65$ بما أن: $E(Y)>0$ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب

3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

0.5 ليكن الحدث F: سحب كرتان من U_2 بيضاوين ، لدينا: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

$p(B\cap F)=\frac{C_4^3}{84}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{84}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{41}{1260}$ ، ومنه: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}=\frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}\approx 0.55$

التمرين الثاني:

0.25 1) أ/ التحقق من أنّ: $z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$ لدينا: $z'=\frac{iz+i+1}{z+2}=\frac{i(z+\frac{i+1}{i})}{z+2}=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$

ب/ تبيين أنّ M' تنتمي إلى دائرة (C): لدينا M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM=BM$

01 ولدينا: $\frac{|i||(z+1-i)|}{|z+2|}=\left|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right|=|z'|$ أي $OM'=\frac{BM}{AM}=1$ إذن $OM'=1$

ومنه M' تنتمي إلى دائرة (C) مركزها O (مبدأ المعلم) ونصف قطرها $r=1$

ج/ تعيين طبيعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا ،

✓ z' تخيليا صرفا معناه $Arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

0.75 أي $Arg(i)+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ معناه $\frac{\pi}{2}+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=k\pi$ أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=k\pi$

المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B "$(E)=(AB)-\{A,B\}$"

0.25 2) – أ/ التحقق من أنّ: $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ لدينا $z'-i=\frac{iz+i+1}{z+2}-i=\frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2}=\frac{1-i}{z+2}$ أي $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$

ب/ استنتاج أنّ: $IM'\times AM=\sqrt{2}$ لدينا: $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ أي $|z'-i|=\frac{|1-i|}{|z+2|}$ وبالتالي $IM'=\frac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM'\times AM=\sqrt{2}$

0.5 ــ استنتاج أنّ: $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

0.5 لدينا $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ أي $Arg(z'-i)=Arg(\frac{1-i}{z+2})$ أي $Arg(z'-i)=Arg(1-i)-Arg(z+2)$

ومنه $Arg(z'-i)+Arg(z+2)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

0.75 ج/ لدينا M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$ ولدينا $IM'\times AM=\sqrt{2}$

أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$

0.25

التمرين الثالث:

1) أ/ $p(2)=0$ ، تعيين a و b : 0.5

	1	-4	6	-4
2	0	2	-4	4
	1	-2	2	0

ومنه : $p(z)=(z-2)(z^2-2z+2)$

ب/ حل المعادلة $p(z)=0$ أي $z-2=0$ أو z^2-2z+2

ومنه حلول المعادلة هي: $z_0=i$ ، $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i$ 0.5

الشكل المثلثي : $z_0=e^{i(0)}$ ، $z_1=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$ ، $z_1=\sqrt{2}e^{-i(\frac{\pi}{4})}$ 0.5

II) 1) تبيين أنّ S تشابه مباشر: لدينا $a=\frac{1+i}{2}\in\mathbb{C}$ و $|a|\neq 1$ اذن هو تشابه مباشر نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ زاويته $\frac{\pi}{4}$ مركزه المبدأ O 0.5

أ/ حساب Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، Z_3 ثمّ تعليّم النقط : A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4

$Z_1=\frac{1+i}{2}Z_0=1+i$ ، $Z_2=\frac{1+i}{2}Z_1=i$ ، $Z_3=\frac{1+i}{2}Z_2=\frac{-1+i}{2}$ ، $Z_4=\frac{1+i}{2}Z_3=\frac{-1}{2}$ 01

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{1+i}{2}z_n\right|}{|z_n|}=\frac{OA_{n+1}}{OA_n}=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ومنه (u_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدها الأول $u_n=OA_0=|Z_0|=2$ 0.5

التحقق : $u_n=u_0\times q^n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ 0.25

إيجاد رتبة n_0: $u_n\le 0.1$ أي $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0.1$ نجد $n_0=9$ 0.5

- المجموع T_n : $T_n=u_0+u_1+\cdots.+u_{n+1}=\frac{4}{2-\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\right]$ 0.25
- $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{4}{2-\sqrt{2}}$ 0.25

3) الاثبات : $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i}{2}z_n-z_n}{Z_{n+1}}=i$ 0.25

- الاستنتاج : $(\overrightarrow{OA_{n+1}};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})=\frac{\pi}{2}$ و $OA_{n+1}=A_nA_{n+1}$ أي أنّ OA_nA_{n+1} قائم في A_{n+1} ومتساوي الساقين 0.25

التمرين الرابع:

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c : $f(0)=-3$ وهذا يعني $c=-3$

ولدينا $f'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=[-ax^2+(2a-b)x+b-c]e^{-x}$ 0.75

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$؛ ومنه $b=0$ ، $f(\sqrt{3})=0$ يعني ان $f(\sqrt{3})=(3a-3)e^{-\sqrt{3}}=0$ ومنه $a=1$

-1 نضع $a=1,b=0,c=-3$ تصبح $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$ نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4t^2}{e^{2t}}\right]=$ 0.5

$4\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^2=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)e^{-x}=+\infty$ 0.5

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 0.5

3 و -1 ومنه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

وشكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

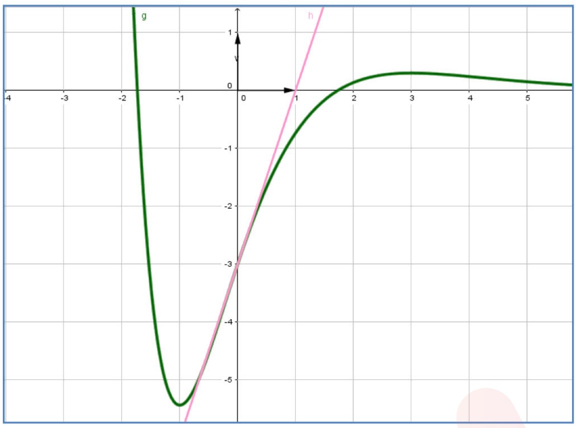
0.5

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$. اي ان

$x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع

هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$ 0.5



0.5

-2 رسم (C_f)

-3 تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f"(x) = 2e^{-x}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

و $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$

$$f"(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

0.5

أي ان $f"(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x}$

و منه $f(x) + 2f'(x) + f"(x)$

$$= (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x}$$

$$= 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

0.5

$f(x) + 2f'(x) + f"(x) = 2e^{-x}$ يكافئ $f(x) = -2f'(x) - f"(x) + 2e^{-x}$ و منه الدالة الأصلية للدالة f هي

الدالة F حيث $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$ أي $F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$

أي $F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$ و منه $F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$

-4 حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين

اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$ هي

0.75

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^{3} f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^{3}$$

$$= (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = \left[(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}\right] u.a$$

-6 m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$

المناقشة لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

0.5

لما $-3 > -m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $-3 < -m \leq 0$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتاهما مختلفتان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $0 < -m < \frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتhن فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .